

NOÇÕES DE PROBABILIDADE

? CARA ? OU ? COROA ?



? Qual será o rendimento da Caderneta de Poupança até o final deste ano ?

?? E qual será a taxa de inflação acumulada em 2011??

?? Quem será o próximo prefeito de São Paulo ??

Experimento Aleatório: é aquele que, ainda que sendo realizado sob condições fixas, não possui necessariamente resultado determinado.

Exemplos:

1. Lançar uma moeda e observar o resultado; lançar um dado e observar o resultado.
2. Sortear um estudante da USP e perguntar se ele é fumante ou não.
3. Sortear um doador de sangue cadastrado e verificar o seu tipo sanguíneo.

Espaço Amostral (Ω): conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos:

1. Lançamento de um dado.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. Doador de sangue (tipo sanguíneo) .

$$\Omega = \{A, B, AB, O\}$$

3. Hábito de fumar.

$$\Omega = \{\text{Fumante}, \text{Não fumante}\}$$

4. Tempo de duração de uma lâmpada.

$$\Omega = \{t. t \geq 0\}$$

Eventos: qualquer subconjunto de resultados possíveis do experimento.

Notação: $A, B, C \subseteq \Omega$

\emptyset (conjunto vazio): *evento impossível*

Ω : *evento certo*

Exemplo: Lançamento de um dado.

Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Alguns eventos:

A : sair face par $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$

B : sair face maior que 3 $\Rightarrow B = \{4, 5, 6\} \subset \Omega$

C : sair face 1 $\Rightarrow C = \{1\} \subset \Omega$

Necessário: saber trabalhar com conjuntos

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral.

$A \cup B$: união dos eventos A e B .

Representa a ocorrência de pelo menos um dos eventos, A ou B .

$A \cap B$: interseção dos eventos A e B .

Representa a ocorrência simultânea dos eventos A e B .

- A e B são disjuntos ou mutuamente exclusivos quando não têm elementos em comum, isto é,

$$A \cap B = \emptyset$$

- A e B são complementares se sua interseção é vazia e sua união é o espaço amostral, isto é,

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{e} \quad A \cup B = \Omega$$

O complementar de A é representado por A^c .

Exemplo: Lançamento de um dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Eventos: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{1\}$

- sair uma face par e maior que 3

$$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$$

- sair uma face par e face 1

$$A \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1\} = \emptyset$$

- sair uma face par ou maior que 3

$$A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$$

- sair uma face par ou face 1

$$A \cup C = \{2, 4, 6\} \cup \{1\} = \{1, 2, 4, 6\}$$

- não sair face par

$$A^c = \{1, 3, 5\}$$

Probabilidade

- Medida da incerteza associada aos resultados do experimento aleatório

Como atribuir probabilidade aos elementos do espaço amostral?

Várias abordagens possíveis:

1. Frequências relativas de ocorrências de cada resultado;
2. Suposições teóricas;

Atribuição da probabilidade:

1. Repetir o experimento n vezes.

A probabilidade do resultado x acontecer será,

$$P(x) = \frac{\text{\#Observações}}{n}$$

Se se fez para todo $x \in \mathbf{A}$, $P(A) = \sum_{x \in A} P(x)$

2. Suposições teóricas

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) \geq 0$, para todo $A \subseteq \Omega$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, para conjuntos A e B disjuntos.
- Vale também para $A_1, A_2, A_3 \dots$ disjuntos 2 a 2.

Exemplo: Lançamento de um dado

Admite-se que o dado é perfeitamente equilibrado

$$P(\text{face } 1) = \dots = P(\text{face } 6) = 1/6.$$

Regra da adição de probabilidades

Sejam A e B eventos de Ω . Então,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Casos particulares:

- Se A e B forem *eventos disjuntos*, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- Para qualquer evento A de Ω ,

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

Exemplo: Na situação de equiprobabilidade, isto é, quando as probabilidades de todos os resultados são iguais , tem-se :

$$P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ de elementos de } A}{n^{\circ} \text{ de elementos de } \Omega}$$

Exemplo: A tabela a seguir apresenta a distribuição de alunos diplomados em 2002, segundo nível de ensino e tipo de instituição, no município de São Paulo.

Nível	Instituição		Total
	Pública	Privada	
Fundamental	144.548	32.299	176.847
Médio	117.945	29.422	147.367
Superior	5.159	56.124	61.283
Total	267.652	117.845	385.497

Fonte: Min. Educação/INEP-Inst.Nacion. Estudos e Pesq. Educacionais; Fundação SEAD

Um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

Ω : conjunto de 385.497 alunos diplomados em 2002 no município de São Paulo.

Definimos os eventos

M : aluno se formou no ensino médio;

F : aluno se formou no ensino fundamental;

S : aluno se formou no ensino superior;

G : aluno se formou em instituição pública.

Temos

$$P(M) = \frac{147.367}{385.497} = 0,382$$

$$P(F) = \frac{176.847}{385.497} = 0,459$$

$$P(S) = \frac{61.283}{385.497} = 0,159$$

$$P(G) = \frac{267.652}{385.497} = 0,694$$

[ir para a tabela](#)

- Qual é a probabilidade do aluno escolhido ter se formado no ensino médio e numa instituição pública?
- $M \cap G$: aluno formado no ensino médio **e** em inst.pública

$$P(M \cap G) = \frac{117.945}{385.497} = 0,306$$

- Qual é a probabilidade do aluno ter se formado no ensino médio ou numa instituição pública?

[ir para a tabela](#)

$M \cup G$: aluno formado no ensino médio **ou** em inst. pública

$$\begin{aligned}
 P(M \cup G) &= (147.367 + 267.652 - 117.945) / 385.497 \\
 &= \frac{297.074}{385.497} = 0,771
 \end{aligned}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA

Probabilidade condicional: Dados dois eventos A e B , a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é denotada por $P(A | B)$ e definida por

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Da definição de probabilidade condicional, obtemos a **regra do produto de probabilidades**

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B).$$

e

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A).$$

Não é válido em geral que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

- Qual é a probabilidade do aluno escolhido ser formado no ensino médio sabendo-se que é de instituição pública?

Olhando diretamente a tabela,

$$\text{temos } P(M|G) = \frac{117.945}{267.652} = 0,441$$

[ir para a tabela](#)

Pela **definição**,

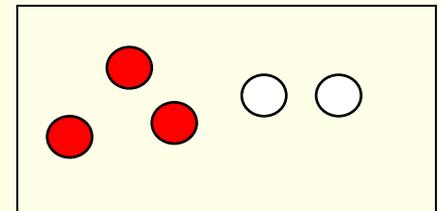
$$P(M | G) = \frac{P(M \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{117.945}{385.497}}{\frac{267.652}{385.497}} = 0,441$$

Exemplo: Em uma urna, há 5 bolas: 2 brancas e 3 vermelhas. Duas bolas são sorteadas sucessivamente, *sem reposição*.

A: 2^a. bola sorteada é branca

C: 1^a. bola sorteada é branca

$P(A) = ???$



Resultados	Prob. da 1ª	Prob. da 2ª 1ª	Probabilidades
<i>BB</i>	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{20}$
<i>BV</i>	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{20}$
<i>VB</i>	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{6}{20}$
<i>VV</i>	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{6}{20}$
		Total	1

Temos $P(A | C) = \frac{1}{4}$ e $P(A) = \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = \frac{2}{5}$

Considere agora que as extrações são feitas **com reposição**, ou seja, a 1ª. bola sorteada é repostada na urna antes da 2ª. extração. Nesta situação, temos

Resultados	Prob. da 1ª	Prob. da 2ª 1ª	Probilidades
<i>BB</i>	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{25}$
<i>BV</i>	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{25}$
<i>VB</i>	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{25}$
<i>VV</i>	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{25}$
		Total	1

Neste caso,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\text{branca na 2}^{\text{a}}.) \\ &= P(\text{branca na 1}^{\text{a}}, \text{branca na 2}^{\text{a}}) + \\ &\quad P(\text{vermelha na 1}^{\text{a}}, \text{branca na 2}^{\text{a}}) \\ &= \frac{4}{25} + \frac{6}{25} = \frac{2}{5} \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$P(A | C) = P(\text{branca na 2}^{\text{a}}. | \text{branca na 1}^{\text{a}}.) = \frac{2}{5} = P(A)$$

$$P(A | C^c) = P(\text{branca na 2}^{\text{a}}. | \text{vermelha na 1}^{\text{a}}.) = \frac{2}{5} = P(A)$$

ou seja, o resultado na 2^a. extração *independe* do que ocorre na 1^a. extração.

Independência de eventos:

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A , isto é,

$$P(A | B) = P(A), \quad P(B) > 0.$$

A fórmula:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) .$$

é válida se e somente se os eventos são independentes.

Exemplo: A probabilidade de Jonas ser aprovado no vestibular é $1/3$ e a de Madalena é $2/3$. Qual é a probabilidade de ambos serem aprovados?

A : Jonas é aprovado

B : Madalena é aprovada

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 1/3 \times 2/3 = 2/9$$

→ Qual foi a suposição feita?